1a. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \times e^{1-x} = +\infty$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0 \end{cases}$ d'où forme indéterminée pour $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \times e^{1-x}$.

d'autre par $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e\,\dfrac{x^2}{e^x} = e \times 0 = 0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ (th. de croissance comparée)

En conclusion:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (la droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$)

1b. la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = (x^2)' \times e^{1-x} + x^2 \times \left(e^{1-x}\right)' = 2x\,e^{1-x} + x^2 \times (1-x)' \times e^{1-x}$$

$$= 2x\,e^{1-x} - x^2 e^{1-x} = x\,e^{1-x}(2-x)$$

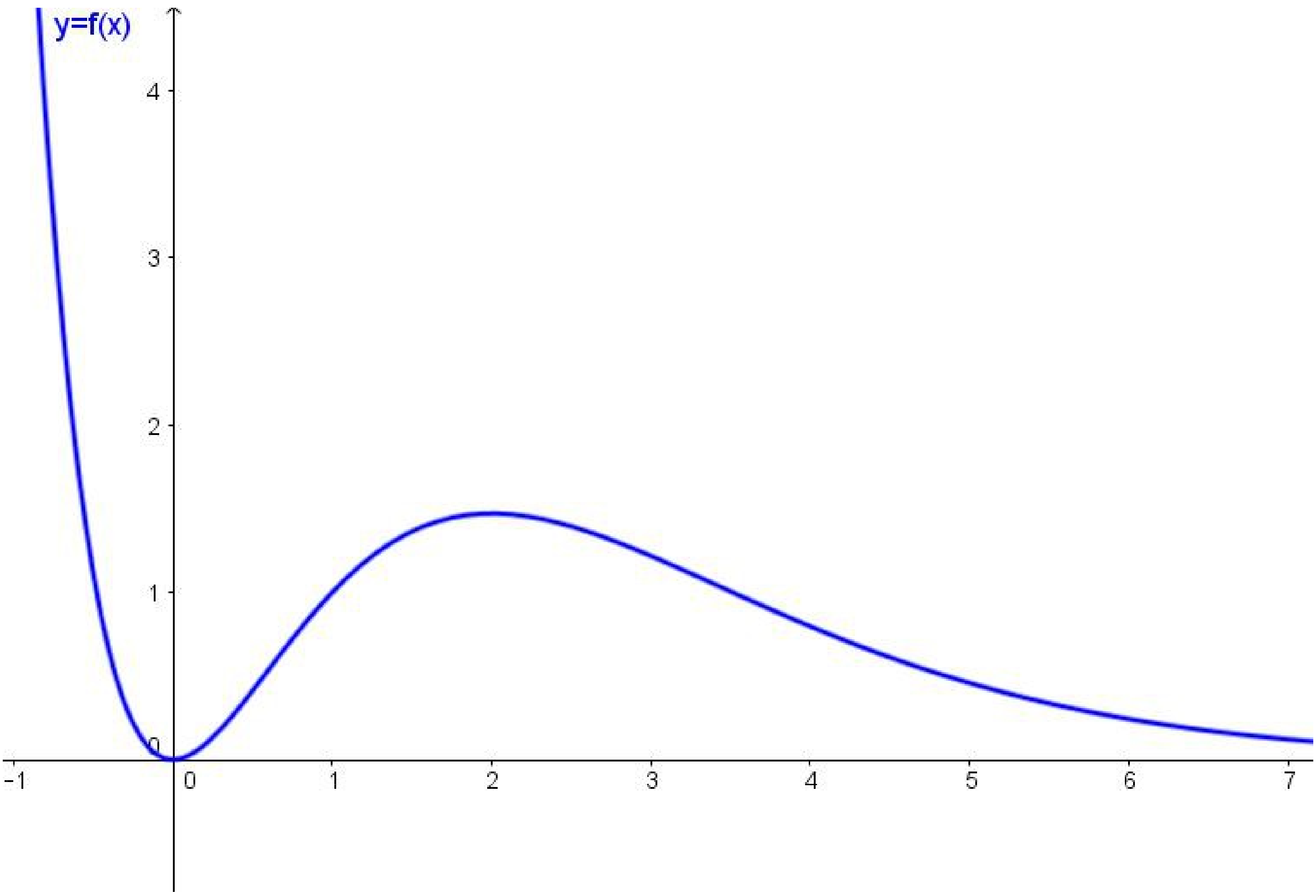
1c. Sachant $e^t > 0$, $f'(x)$ a le signe de $x(2-x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/e$	$\searrow$	0

Voir la courbe $\mathcal{C}$ de f à la fin de l'exercice s.v.p.

N°

Q1d)



Q2a)

$$I_0 = \int_0^1 x^0 e^{1-x}\,dx = \int_0^1 1 \times e^{1-x}\,dx$$

$$= \int_0^1 -(1-x)' \times e^{1-x}\,dx$$

$$= \left[-e^{1-x}\right]_0^1$$

$$= (-e^0) - (-e^1)$$

$$= -1 + e$$

$$\sim 1{,}72.$$

Q2b)

$$\left(x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\right)'=\left(x^{n+1}\right)'\times\mathrm{e}^{1-x}+x^{n+1}\times\left(\mathrm{e}^{1-x}\right)'$$

$$=(n+1)x^{n}\times\mathrm{e}^{1-x}+x^{n+1}\times(1-x)'\mathrm{e}^{1-x}$$

$$=(n+1)x^{n}\mathrm{e}^{1-x}-x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}.$$

Par suite

$$\int_0^1\left(x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\right)'\mathrm{d}x=\int_0^1\left((n+1)x^{n}\mathrm{e}^{1-x}-x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\right)\mathrm{d}x$$

ce qui équivaut à

$$\left[x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1=(n+1)\int_0^1 x^{n}\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$1^{n+1}\mathrm{e}^{0}-0^{n+1}\mathrm{e}^{1}=(n+1)\mathrm{I}_n-\mathrm{I}_{n+1}$$

$$(n+1)\mathrm{I}_n-\mathrm{I}_{n+1}=1-0$$

$$\mathrm{I}_{n+1}=(n+1)\mathrm{I}_n-1.$$

Q2c) D'après Q2b) et Q2a)

$$I_1 = 1 \times I_0 - 1 = I_0 - 1 = (e-1) - 1 = e - 2$$

$$I_2 = 2I_1 - 1 = 2(e-2) - 1 = 2e - 5\,.$$

Q2d)

$$I_2 = \int_0^1 x^2 e^{1-x}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

I_2 est l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan au-dessus de l'axe des abscisses, au-dessous de la courbe de f, et dans la bande verticale délimitée par les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Q3a)

Supposons $x \in [0;1]$.

$0 \leqslant x \leqslant 1$; $-1 \leqslant -x \leqslant 0$; $0 \leqslant 1-x \leqslant 1$;

$e^0 \leqslant e^{1-x} \leqslant e^1$ (la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$)

$1 \leqslant e^{1-x} \leqslant e$;

$1 \times x^n \leqslant e^{1-x} \times x^n \leqslant e \times x^n$ ($x^n \geqslant 0$ sachant $x \geqslant 0$)

$x^n \leqslant x^n \times e^{1-x} \leqslant e\,x^n$

Q3b)

Sachant $x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant e x^n$ pour tout $x \in [0;1]$,

il résulte du théorème de comparaison des intégrales

$$\int_0^1 x^n dx \leqslant \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leqslant \int_0^1 e x^n dx.$$

soit

$$\int_0^1 x^n dx \leqslant I_n \leqslant e \int_0^1 x^n dx.$$

De plus, $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}.$

Ainsi

$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

Q3c)

Sachant $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème de comparaison des limites assure que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0.$